

**MIIA – Differentialrechnung mehrerer reeller Veränderlicher – SoSe 2007**

Kurzfassung  
Martin Schottenloher

∞ ∞ ∞

**Kapitel IX. Kurven und Vektorfelder**

Teil A (§ 25 – 27)

Nachdem im vorangehenden Kapitel die topologischen Werkzeuge bereitgestellt worden sind, betreiben wir jetzt Analysis für 1-dimensionale Objekte in Banachräumen  $E$  (z.B. im Falle  $E = \mathbb{R}^n$ ), das sind Kurven in  $E$ , also stetige Funktionen

$$\gamma : [a, b] \rightarrow E$$

und allgemeinere Abbildungen  $f : [a, b] \rightarrow E$ .

Es geht also in diesem Kapitel um vektorwertige Differential- und Integralrechnung in einer Veränderlichen.

Auf diese Weise wird die Analysis wiederholt und es wird insbesondere die Theorie der Integration gefestigt und erweitert. Schließlich werden Vektorfelder – oder besser Pfaffsche Formen (aus mathematischer Sicht) – längs Kurven zu Kurvenintegralen integriert. Damit ergibt sich ein natürlicher Zusammenhang und eine nachhaltige Motivation zur Differentialrechnung mehrerer Veränderlichen durch die Potentialfunktionen, die dabei auftreten, und ihre Gradienten.

Im folgenden ist  $E$  stets ein Banachraum über  $\mathbb{R}$  oder über  $\mathbb{C}$  mit der Norm  $\| \cdot \|$ , und es ist  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall in  $\mathbb{R}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . In vielen Fällen ist es interessant genug den Fall  $E = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Norm zu betrachten.

**§25 Kurven und ihre Länge**

**(25.1) Definition:** Eine *Kurve in  $E$*  ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow E.$$

Eine *Kurve in  $\Omega$*  für eine Teilmenge  $\Omega \subset E$  ist eine Kurve in  $E$ , die auch noch  $\gamma([a, b]) \subset \Omega$  erfüllt.

Statt „Kurve“ wird auch der Ausdruck „Weg“, „parametrisierte Kurve“, „parametrisierter Weg“ oder „Bewegung“ verwendet. Das soll hier in der Vorlesung stets den gleichen Begriff bezeichnen.

Die *Spur*  $\gamma^*$  der Kurve  $\gamma$  ist das Bild von  $[a, b]$  unter  $\gamma$ , also

$$C_\gamma = \gamma^* := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\} \subset E.$$

Statt Spur sind auch die Ausdrücke „Kurvenbogen“, „Bogen“, „Orbit“ oder „Bahn“ geläufig.

Die Spur  $\gamma^*$  wird durch  $\gamma$  *parametrisiert* und man spricht davon, dass  $\gamma$  eine *Parametrisierung* von  $\gamma^*$  ist.  $\gamma^*$  als Punktmenge hat in der Regel viele verschiedene Parametrisierungen. Für einen Punkt  $\gamma(t) \in \gamma^*$  ist  $t$  der (bzw. ein) *Parameter* des Punktes  $\gamma(t)$ . Der Parameter ist nur eindeutig, wenn  $\gamma$  injektiv ist.

Die Spur einer Kurve ist das eigentliche 1-dimensionale Objekt.

Zur Bedingung der Stetigkeit:  $\gamma$  ist stetig in  $t \in [a, b]$  (nach Kap. XIII), wenn für alle Folgen  $(t_k)$  in  $[a, b]$  aus  $t_k \rightarrow t$  stets  $\gamma(t_k) \rightarrow \gamma(t)$  folgt, also  $\|\gamma(t_k) - \gamma(t)\| \rightarrow 0$ .

### (25.2) Beispiele:

1° Für zwei Vektoren  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$ , ist  $\gamma(t) = tx + (1-t)y = y + t(x-y)$ ,  $t \in [0, 1]$ , offensichtlich eine Kurve, die das *Geradenstück*  $S$  von  $y$  nach  $x$  parametrisiert.  $S$  ist die Spur  $S = \gamma^*$  von  $\gamma$ . Eine andere Parametrisierung von  $S$  ist  $\gamma_1(t) = t^2x + (1-t^2)y$ ,  $t \in [0, 1]$ . Eine weitere Parametrisierung ist  $t \mapsto x + t(y-x) = \gamma_2(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , die dasselbe Geradenstück  $S$  als eine Bewegung von  $x$  nach  $y$  darstellt.

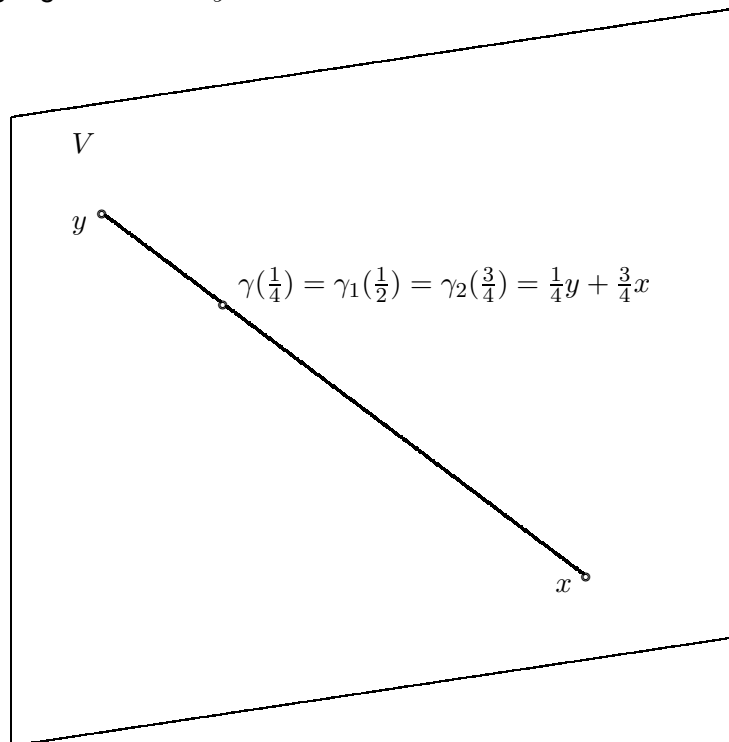


Abb.: Die Spur eines Geradenstücks und die Parametrisierung eines Punktes durch 3 verschiedenen Kurven  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$

2° Die *Kreislinie*  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  hat die Parametrisierung  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , oder  $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Auch  $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$  oder  $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos 2t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , sind Parametrisierungen von  $\mathbb{S}^1$ , bei denen allerdings jeder Punkt der Kreislinie doppelt durchlaufen wird. Schließlich ist für jede stetige und surjektive Abbildung  $\theta : [a, b] \rightarrow [0, 2\pi]$  durch  $\gamma(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) = e^{i\theta(t)}$ ,  $t \in [a, b]$ , eine Parametrisierung der Kreislinie gegeben.

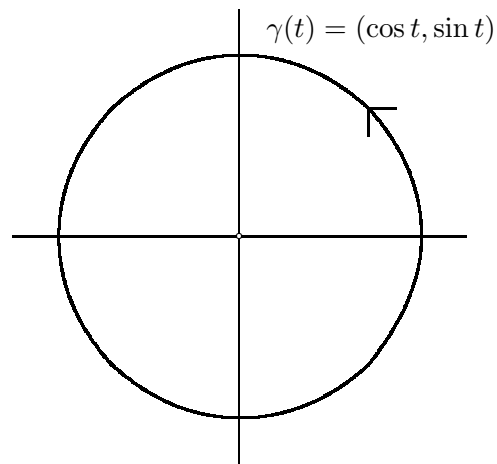


Abb.: Die Kreislinie mit Standardparametrisierung und Standarddurchlaufungsrichtung

3° Die *Ellipse*  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{A})^2 + (\frac{y}{B})^2 = 1\}$  mit den „Halbachsen“  $A, B > 0$  hat die Parametrisierung  $\gamma(t) = (A \cos t, B \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

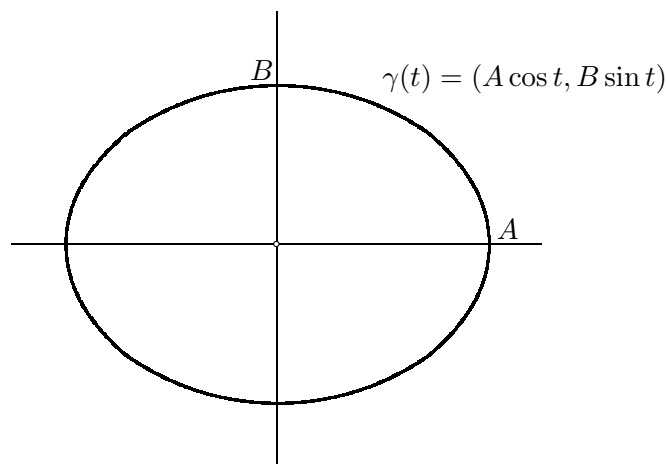


Abb.: Ellipse mit Standardparametrisierung

4° Die *Neilsche Parabel*  $\gamma : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \gamma(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t \in [-R, +R]$ .  $\gamma$  ist differenzierbar, aber die Spur hat eine „Spitze“ in  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ .

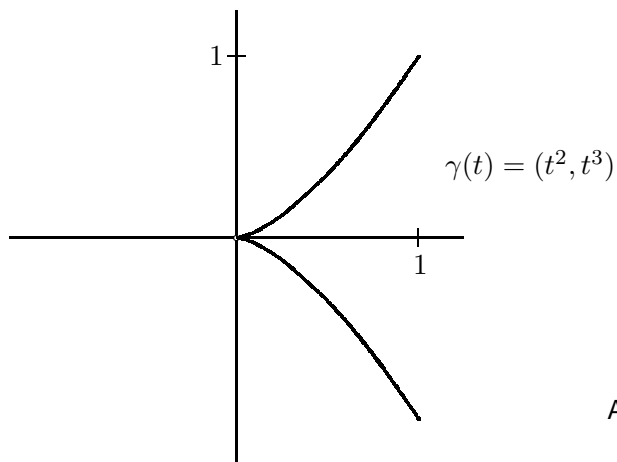


Abb.: Die Neilsche Parabel

5° Die *Schraubenlinie*  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$ ,  $t \in [a, b]$ .

6° Die *Zykloide*  $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $t \in [a, b]$ , beschreibt die Bewegung eines festen Punktes auf einer Kreisscheibe mit Radius 2, die auf der  $x$ -Achse abrollt.

7° Wichtige Sichtweise: Eine Kurve  $\gamma$  wird auch als eine *Bewegung* des Punktes  $\gamma(t)$  in Abhängigkeit des Parameters  $t$  verstanden. Im Falle der Interpretation von  $t$  als Zeitparameter hat man die Ableitung (Definition kommt gleich) von  $\gamma$  als Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\gamma}(t)$ . Damit lassen sich ganz allgemein dynamische Prozesse beschreiben.

Beispielsweise im Kraftgesetz von Newton:  $k$  Massenpunkte ( $k \in \mathbb{N}_1$ ) bewegen sich im  $\mathbb{R}^3$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t \in [T_0, T_1]$  als Kurve

$$x(t) = \left( x_{(1)}^1, x_{(1)}^2, x_{(1)}^3, x_{(2)}^1, x_{(2)}^2, x_{(2)}^3, \dots, x_{(k)}^1, x_{(k)}^2, x_{(k)}^3 \right) \in \mathbb{R}^{3k}$$

im  $\mathbb{R}^{3k}$ . Die Geschwindigkeiten  $v(t) = \dot{x}(t)$  liefern eine weitere Kurve, und die beiden Objekte fügen sich zusammen zu einer Kurve  $\gamma(t) = (x(t), v(t))$  in  $\mathbb{R}^{6n}$ . Das Kraftgesetz von Newton besagt

$$\dot{v}(t) = K(t, x(t), v(t))$$

für einen geeigneten „Kraftvektor“  $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ .

**(25.3) Definition:** (Differentiation) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  eine Abbildung mit Werten in einem normierten Raum  $E$ . Die *Ableitung* von  $\gamma$  in einem Punkte  $t_0 \in [a, b]$  ist der Vektor

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h},$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Dabei bedeutet der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} G(h) = B$  in  $E$  genau, dass für alle Folgen  $(h_n)$  mit  $t_0 + h_n \in [a, b]$ ,  $h_n \neq 0$  und  $h_n \rightarrow 0$  stets  $G(h_n) \rightarrow B$  gilt. Äquivalent dazu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in \mathbb{R} : 0 < |h| < \delta \text{ und } t_0 + h \in [a, b] \implies \|G(h) - B\| < \varepsilon.$$

Die Ableitung  $\dot{\gamma}$  schreibt man im Falle der Existenz auch als

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\gamma \quad \text{und in } t_0 : \dot{\gamma}(t_0) = \frac{d}{dt}\gamma(t_0) = \frac{d}{dt}\gamma|_{t=t_0}.$$

Die Ableitung  $\dot{\gamma}(t_0)$  wird aus gutem Grund auch *Geschwindigkeitsvektor* oder auch *Tangentenvektor* in  $\gamma(t_0)$  genannt.

Im Falle  $E = \mathbb{R}^n$  und  $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n)$  gilt:  $\gamma$  ist in  $t_0$  genau dann differenzierbar, wenn das für alle  $\gamma^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , gilt und es ist im positiven Falle  $\dot{\gamma}(t_0) = (\dot{\gamma}^1(t_0), \dot{\gamma}^2(t_0), \dots, \dot{\gamma}^n(t_0))$ .

Genau wie im  $\mathbb{R}$ -wertigen Fall (vgl. 16.2) zeigt man das notwendige Kriterium: Eine in  $t_0 \in [a, b]$  differenzierbare Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  ist in  $t_0$  stetig.

**Rechenregeln zur Ableitung:** Es seien die Kurven  $\gamma, \beta : [a, b] \rightarrow E$  in  $t_0 \in [a, b]$  differenzierbar, es sei  $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $t_0$  differenzierbare skalare Funktion und es sei  $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$  differenzierbar in  $s_0 \in [a', b']$  mit  $\varphi(s_0) = t_0$ . Unmittelbar wie im skalaren Fall ( $\mathbb{R} = E$ ) lässt sich zeigen, dass  $\gamma + \beta$  und  $\lambda\gamma$  in  $t_0$  differenzierbar sind sowie  $\gamma \circ \varphi$  in  $s_0$  mit den folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma + \beta)(t_0) &= \dot{\gamma}(t_0) + \dot{\beta}(t_0), \\ \frac{d}{dt}(\lambda\gamma)(t_0) &= \dot{\lambda}(t_0)\gamma(t_0) + \lambda(t_0)\dot{\gamma}(t_0), \\ \frac{d}{ds}(\gamma \circ \varphi)(s_0) &= \frac{d}{ds}\varphi(s_0) \frac{d}{dt}\gamma(t_0). \end{aligned}$$

**(25.4) Beispiele:**

1° Die Gerade  $\gamma(t) = y + t(x - y)$ ,  $t \in [0, 1]$ , hat die Ableitung  $\dot{\gamma}(t) = x - y =: v \in E$  ( $x, y \in E$ ,  $x \neq y$ ). Mit der Parametrisierung der Spur  $S = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\}$  durch  $\gamma_2(t) = x + t(y - x)$ ,  $t \in [0, 1]$ , gilt  $\dot{\gamma}_2(t) = y - x = -v$  und durch  $\gamma_1(t) = y + t^2(x - y)$ ,  $t \in [0, 1]$ , entsprechend  $\dot{\gamma}_2(t) = 2t(x - y) = 2tv$ .

Man kann auch eine Parametrisierung  $\gamma$  des Geradenstücks angeben, die injektiv ist und  $\dot{\gamma}(t_0) = 0$  in einem Punkte  $z$  mitten in  $S$  erfüllt. Zum Beispiel  $\gamma(t) = x + h(t)(y - x)$ ,  $t \in [0, 1]$ , mit  $h(t) = 1 - 3t + 6t^2 - 4t^3$ :  $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , also  $\gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(x + y) = z$ , und  $\dot{h}(\frac{1}{2}) = 0$ , also  $\dot{\gamma}(\frac{1}{2}) = 0$ . Die Parametrisierung bleibt auf halbem Weg stehen, um allerdings sofort wieder fortzufahren, denn  $h$  ist auf dem Intervall  $[0, 1]$  streng monoton fallend.

2° Die Einheitskreislinie  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) = e^{it}$ ,  $t \in [a, b]$ , hat die Ableitung  $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$ . Offensichtlich stehen  $\gamma(t)$  und  $\dot{\gamma}(t)$  senkrecht aufeinander und es gilt:  $\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = 1$ . Durch  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  wird also für jedes  $t$  ein orientiertes (rechtshändiges) Orthonormalsystem gegeben (vgl. 26.5).

3° Für die Schraubenlinie  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$ ,  $t \in [0, b]$ , erhalten wir als die Ableitung  $\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t, h)$ .

4° Für stetige  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $\gamma(t) = (t, f(t))$ ,  $t \in [a, b]$  eine Kurve mit dem Graphen  $\Gamma_f$  als Spur. Ist  $f$  differenzierbar, so ist auch  $\gamma$  differenzierbar und es ist  $\dot{\gamma}(t) = (1, \dot{f}(t))$ .

Wir kommen nun zum Begriff der **Kurvenlänge**, den wir ausführlich begründen wollen:

Die Kurvenlänge soll für die Gerade  $\gamma(t) = tx + (1 - t)y = y + t(x - y)$ ,  $t \in [0, 1]$ , von  $y$  nach  $x$  sicherlich  $\|x - y\|$  sein. Weil die Kurvenlänge für zusammengesetzte Kurven additiv sein soll, ergibt sich daraus für einen Polygonzug  $\gamma$  mit den Vektoren  $x_0, x_1, \dots, x_m$  als Ecken der folgende Ansatz für die Länge  $L\gamma$  des Polygonzugs  $\gamma$

$$L\gamma = \sum_{k=1}^m \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Solche Polygonzüge können zur Approximation von beliebigen Kurven dienen, so dass sich die Länge in einem Grenzprozess in der folgenden Weise auf solche Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  überträgt, für die Konvergenz gewährleistet ist:

Eine *Zerlegung* des Intervalls  $[a, b]$  ist eine endliche Teilmenge  $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\} \subset [a, b]$  mit  $t_0 = a \leq t_k < t_{k+1} \leq t_m = b$  für  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ . Eine Approximation der (noch zu definierenden) Kurvenlänge zur Zerlegung  $Z$  wird durch

$$V(\gamma, Z) := \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

gegeben.

**(25.5) Definition:** (Beschränkte Variation und Kurvenlänge) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  eine Kurve, also eine stetige Abbildung.

1° Für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  heißt

$$V_a^b(\gamma, Z) = V(\gamma, Z) := \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

die *Z-Variation* von  $\gamma$ .

2° Die *totale Variation*  $V_a^b(\gamma)$  von  $\gamma$  ist

$$V_a^b(\gamma) := \sup\{V_a^b(\gamma, Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}.$$

Die Kurve  $\gamma$  ist von *beschränkter Variation*, wenn die totale Variation beschränkt, also endlich, ist:  $V_a^b(\gamma) < \infty$ .

Diesen Begriff brauchen wir auch für Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist demnach von beschränkter Variation, falls es  $C > 0$  so gibt, dass für alle Zerlegungen  $Z$  von  $[a, b]$  die  $Z$ -Variation  $V_a^b(f, Z) = \sum_{k=1}^m |f(t_k) - f(t_{k-1})|$  der Ungleichung  $V_a^b(f, Z) \leq C$  genügt.

3°  $\gamma$  heißt genau dann *rektifizierbar*, wenn  $V_a^b(\gamma) < \infty$  gilt, und

$$L\gamma = L_a^b\gamma := V_a^b(\gamma)$$

ist dann definitionsgemäß die Kurvenlänge von  $\gamma$ .

„Rektifizierbar“ und „von beschränkter Variation“ sind also synonym, für Kurven sieht man eher die Eigenschaft, eine endliche Kurvenlänge zu haben, während für Funktionen eher das Oszillationsverhalten im Vordergrund steht.

**(25.6) Beispiele:** 1° Das Geradenstück  $\gamma(t) = tx + (1 - t)y = y + t(x - y)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Für eine Zerlegung  $Z$  des Intervalls  $[0, 1]$  gilt wegen  $\gamma(t) - \gamma(t') = (t - t')(x - y)$  für beliebige  $t, t' \in [0, 1]$  stets

$$V(\gamma, Z) = \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \|x - y\| = \|x - y\|.$$

Also ist  $L\gamma = \|x - y\|$  die Länge von  $\gamma$ .

2° Beschreibung einer Kurve, die nicht rektifizierbar ist: Auf dem Intervall  $[0, 1[$  lässt sich eine stetige Funktion  $h$  definieren, die im Teilintervall  $[0, \frac{1}{2}]$  zunächst mit der Steigung 4 bis zur Höhe 1 linear ansteigt und dann mit der Steigung  $-4$  auf 0 abfällt, die dann mit doppelter Steigung wieder bis 1 ansteigt und analog abfällt etc. mit immer steileren unendliche vielen Zacken. Für eine geeignete stetige Funktion  $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  erhält man denn eine stetige ebene Kurve  $\gamma(t) = (t, \lambda(t)h(t))$ , die keine beschränkte Variation hat. Man wähle z.B.  $\lambda$  monoton fallend mit  $\lambda(0) = 1$ ,  $\lambda(1) = 0$ , so dass noch auf jedem der Intervalle  $I_n := [1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-(n+1)}]$  größer oder gleich  $s_n := \frac{1}{n}$  bleibt (etwa durch lineare Interpolation). Dann ist die Länge der auf  $I_n$  beschränkten Kurve größer oder gleich  $2s_n$  und die gesamte Variation übersteigt jede Partialsumme  $\sum_{n=1}^k 2s_n$ . Die Variation ist nicht beschränkt, weil die harmonische Reihe  $\sum s_n$  divergiert. 22.05.2007

3° Ähnlich die Kurve  $\gamma : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, t \cos \frac{\pi}{t})$  für  $t \in [-1, 0[$ , und  $\gamma(0) = (0, 0)$ . Für die Zerlegungen  $Z_n = \{-1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n}, 0\}$  ist  $V_{-1}^0(\gamma, Z_n) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , daher hat  $\gamma$  und auch  $t \cos \frac{\pi}{t}$  keine beschränkte Variation.

4° Für die Kreislinie, parametrisiert durch die Kurve  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, b]$ , für  $b > 0$ , wissen wir aus §7, dass  $L_0^b\gamma \leq b$  gilt. Die Gleichheit folgt aus einer sehr effizienten Formel (in 25.12) für die Kurvenlänge von allgemeinen differenzierbaren Kurven, die wir im Folgenden herleiten wollen.

**(25.7) Eigenschaften der Variation:**  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  sei eine Kurve.

1° Für Zerlegungen  $Z, Z^*$  von  $[a, b]$  mit  $Z \subset Z^*$  ( $Z^*$  heißt dann eine *Verfeinerung* von  $Z$ ) gilt

$$V_a^b(\gamma, Z) \leq V_a^b(\gamma, Z^*),$$

wie unmittelbar aus der Dreiecksungleichung folgt.

2° Für  $a < c < b$  und Zerlegungen  $Z'$  von  $[a, c]$  und  $Z''$  von  $[c, b]$  gilt mit  $Z = Z' \cup Z''$  direkt:

$$V_a^b(\gamma, Z) = V_a^c(\gamma, Z') + V_c^b(\gamma, Z'').$$

3° Für  $a < c < b$  folgt:

$$V_a^b \gamma = V_a^c \gamma|_{[a,c]} + V_c^b \gamma|_{[c,b]}.$$

4° Es sei  $F : E \rightarrow E$  eine lineare Isometrie, das heißt  $F$  ist linear und erfüllt  $\|F(v)\| = \|v\|$  für alle  $v \in E$ . Dann gilt  $L(F \circ \gamma) = L\gamma$  und dasselbe ist richtig für Translationen  $T : E \rightarrow E$ ,  $v \mapsto v + b$ , um einen festen Vektor  $b \in E$ . Also gilt für Abbildungen  $A = F + T : E \rightarrow E$  stets  $L\gamma = L(A \circ \gamma)$ . Die Menge aller Transformationen der Form  $A = F + T$ , mit  $F$  eine surjektive Isometrie und  $T$  eine Translation, ist eine Gruppe bezüglich der Komposition, die auch die *Gruppe der Bewegungen* genannt wird.

5° Für eine stetige und bijektive Abbildung  $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$  ist  $\gamma' := \gamma \circ \varphi$  Kurve mit derselben Spur wie  $\gamma$  ( $\varphi$  heißt *Parameterwechsel*). Es ist  $L\gamma = L(\gamma \circ \varphi)$ , weil  $\varphi$  die Zerlegungen  $Z'$  von  $[a', b']$  in eindeutiger Weise den Zerlegungen  $Z = \varphi(Z')$  von  $[a, b]$  zuordnet. Insbesondere gilt:  $\gamma$  ist genau dann rektifizierbar, wenn das für  $\gamma'$  zutrifft.

**(25.8) Satz:** *Jede lipschitzstetige Kurve ist rektifizierbar.*

**(25.9) Lemma:** *Im Falle  $E = \mathbb{R}^n$  gilt für eine Kurve  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ :  $\gamma$  ist genau dann rektifizierbar, wenn alle  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , von beschränkter Variation sind.*

**(25.10) Satz:** *Jede stetig differenzierbare Kurve ist lipschitzstetig und daher rektifizierbar.*

Vgl. Mittelwertsatz 17.3 und 27.19.

### Vektorwertige Integration:

Neben der vektorwertigen Differentiation (vgl. 25.3) benötigen wir auch die vektorwertige Integration, die wir im übernächsten Paragraphen (§27) und danach eingehender studieren. In diesem Paragraphen dient das Integral dazu, als Höhepunkt eine einfache und effiziente Formel für die Kurvenlänge einer stetig differenzierbaren Kurve zu erhalten.

Hier wollen wir nur feststellen, dass zu jeder stetigen Abbildung  $\beta : [a, b] \rightarrow E$  in einen Banachraum  $E$  das *Integral*

$$\int_a^b \beta(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \beta(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

als Grenzwert existiert, wobei  $t_k = a + k2^{-n}(b - a)$ , also  $t_k - t_{k-1} = 2^{-n}$  ( $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_{2^n}\}$  ist eine äquidistante Zerlegung von  $[a, b]$  der Feinheit  $2^{-n}$ ). Die Konvergenz der Folge von Summen folgt wie im Falle von  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen (vgl. 20.6) aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit (siehe auch 27.12) von  $\beta$  und wird später in einem allgemeineren Rahmen bewiesen (siehe 27.14.2°).

Im Falle von  $E = \mathbb{R}^n$  und  $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n)$  ist

$$\int_a^b \beta(t) dt = \left( \int_a^b \beta^1(t) dt, \int_a^b \beta^2(t) dt, \dots, \int_a^b \beta^n(t) dt \right).$$

Wie im skalaren Fall zeigt man (für den Beweis vgl. 27.17 und 27.18):

**(25.11) Satz:** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Sei  $\beta : [a, b] \rightarrow E$  stetig. Die Abbildung  $t \mapsto \int_a^t \beta(s) ds$  ist differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_a^t \beta(s) ds = \beta(t).$$

Für jede differenzierbare Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  mit  $\dot{\gamma} = \beta$  ( $\gamma$  kann dann als Stammkurve oder Stammfunktion bezeichnet werden) ist

$$\int_a^b \beta(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

**(25.12) Satz:** Sei  $\gamma$  eine stetig differenzierbare Kurve in  $E$ .

1° Dann ist

$$L\gamma = L_a^b \gamma = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

2° Die Weglängenfunktion  $s(t) = s_\gamma(t) := L_a^t(\gamma|_{[a,t]})$ ,  $t \in [a, b]$ , ist stetig differenzierbar mit  $\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$ .

25.05.2007

**(25.13) Hilfssatz:** Für stetige  $\beta : [a, b] \rightarrow E$  gilt

$$\left\| \int_a^b \beta(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\beta(t)\| dt.$$

**(25.14) Beispiele:**

1° Die Parametrisierung  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, b]$ , des Kreisbogens in  $\mathbb{R}^2$  erfüllt  $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$  und damit  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$  in der euklidischen Norm. Also ist

$$L\gamma = \int_0^b dt = b$$

(vgl. 25.6.4° und 7.12.4°).

Bezüglich einer anderen Norm erhält man entsprechend andere Resultate für die Länge. Zum Beispiel bezüglich der 1-Norm für  $b = \frac{1}{2}\pi$ :  $L\gamma = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin t + \cos t) dt = 2$  und bezüglich der  $\infty$ -Norm  $L\gamma = 2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos t dt = 2(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

2° Der Ellipsenbogen  $\gamma(t) = (A \cos t, B \sin t)$ ,  $t \in [0, b]$ , für  $A, B > 0$  hat in der euklidischen Norm wegen  $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = A^2 \sin^2 t + B^2 \cos^2 t$  die Länge

$$L\gamma = \int_0^b \sqrt{A^2 \sin^2 t + B^2 \cos^2 t} dt.$$

Dieses Integral ist nicht so einfach zu bestimmen wie das in 1°, es ist ein Beispiel eines *elliptischen Integrals*.

3° Für den Zykloidenbogen  $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  errechnet sich die Länge für einen vollen Umlauf folgendermaßen:  $\dot{\gamma}(t) = (1 - \cos t, \sin t)$  und  $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2}$ . Daher

$$L\gamma = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = 4 \int_0^\pi \sin x dx = 8.$$



Zum Schluss des Paragraphen beschreiben wir eine Ausdehnung der Formel 25.12 auf stückweise stetig differenzierbare Kurven. Diese Verallgemeinerung ist wichtig für Anwendungen, weil viele Kurven durch das Zusammenfügen von endlich vielen stetig differenzierbaren Kurven entstehen.

**(25.15) Definition:** Eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in  $E$  ist eine Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  mit

1°  $\gamma$  ist stetig, das heißt  $\gamma$  ist eine Kurve, und

2° es gibt eine Zerlegung  $A = \{a_0 = a, a_1, \dots, a_m = b\}$  des Intervalls  $[a, b]$ , so dass für alle  $k = 1, 2, \dots, m$  die Restriktionen  $\gamma|_{[a_k, a_{k-1}]}$  stetig differenzierbar sind.

Ein typisches Beispiel ist ein Polygonzug mit den Ecken  $x_0, x_1, \dots, x_m \in E$ , wobei  $\gamma : [0, m] \rightarrow E$ ,  $a_k = k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , und  $\gamma(k+t) = x_k + t(x_{k+1} - x_k)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**(25.16) Satz:** Sei  $\gamma$  eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in  $E$ .

1° Dann ist

$$L\gamma = L_a^b \gamma = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

2° Die Weglängenfunktion  $s(t) = s_\gamma(t) := L_a^t(\gamma|_{[a,t]})$ ,  $t \in [a, b]$ , ist stückweise stetig differenzierbar mit  $\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$ ,  $t \in [a, b] \setminus A$ .

Wir integrieren dabei stückweise stetige Funktionen, und benötigen damit eine Verallgemeinerung des Integralbegriffs, die wir erst im übernächsten Paragraphen gründlich beschreiben.

## §26 Bogenlänge und Krümmung

In diesem Paragraphen konzentrieren wir uns auf die Spur einer Kurve als Punktmenge  $C$  in einem Banachraum  $E$  und wir schränken unsere Untersuchungen auf solche  $C$  ein, die eine im wesentlichen injektive Parametrisierung zulassen. Im Falle der Rektifizierbarkeit kann man einer solchen Spur ihre Länge zuordnen.

Dann betrachten wir differenzierbare und reguläre Kurven in den Spezialfällen der euklidischen Ebene  $E \cong \mathbb{R}^2$  und des euklidischen Raumes  $E \cong \mathbb{R}^3$ .

**(26.1) Definition:** Ein *Jordanbogen* in  $E$  ist eine Punktmenge  $C \subset E$ , zu der es eine Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  mit  $\gamma([a, b]) = \gamma^* = C$  so gibt, dass  $\gamma$  injektiv auf  $[a, b[$  ist. Eine solche Parametrisierung nennen wir auch *injektive Parametrisierung*, obwohl der Fall  $\gamma(a) = \gamma(b)$  eintreten kann.

Ein Jordanbogen heißt *geschlossen*, wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt.

### (26.2) Beispiele und Bemerkungen:

1° Jedes Geradenstück  $S$  von  $y$  nach  $x$  für Vektoren  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$ , ist ein Jordanbogen vermöge der Parametrisierung  $\gamma(t) = tx + (1-t)y = y + t(x-y)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Die Darstellung gibt auch Sinn für ein beliebiges Intervall  $[a, b]$  der Länge  $b-a > 0$  anstelle von  $[0, 1]$ : Die Kurve parametrisiert dann das Geradenstück von  $y + a(x-y)$  nach  $y + b(x-y)$ .

2° Jedes Kreisbogenstück  $C = \{r(\cos t, \sin t) : t \in [0, b]\}$  für  $0 < b \leq 2\pi$  ist ein Jordanbogen, nicht geschlossen für  $b < 2\pi$  und geschlossen im Falle  $b = 2\pi$ .

3° Für linear unabhängige  $x, y \in E$  ist  $C_{x,y} = \{(\cos t)x + (\sin t)y : t \in [0, 2\pi]\}$  ein geschlossener Jordanbogen mit Parametrisierung  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow E$ ,  $t \mapsto (\cos t)x + (\sin t)y$ .

4° Ganz allgemein „sieht ein geschlossener Jordanbogen  $C$  so aus wie  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ “, das soll heißen, dass es einen Homöomorphismus  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$  gibt, die metrischen Räume  $C$  (in der Relativtopologie) und  $\mathbb{S}^1$  (in der Relativtopologie) also topologisch äquivalent sind.

Denn für eine injektive Parametrisierung  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow E$  (d.h.  $\gamma$  stetig,  $\gamma|_{[0, 2\pi[}$  injektiv und  $\gamma^* = C$ ) wird eine injektive stetige Abbildung

$$\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow E \text{ mit } \alpha(\mathbb{S}^1) = C$$

durch  $\alpha(e^{it}) = \gamma(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , definiert. Als Abbildung nach  $C$  ist dann  $\alpha$  bijektiv.  $\alpha$  ist außerdem stetig in Bezug auf die Relativtopologien (auf  $\mathbb{S}^1$  und  $C$ ). Daher ist  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$  ein Homöomorphismus, denn nach 23.16 ist wegen der Stetigkeit von  $\alpha$  für jede abgeschlossene und daher kompakte Teilmenge  $A \subset \mathbb{S}^1$  die Bildmenge  $\alpha(A)$  in  $C$  kompakt, also abgeschlossen. Daher ist die Umkehrabbildung  $\alpha^{-1}$  stetig.

**Bemerkung:** Die letzte Argumentation gilt allgemeiner: Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige und bijektive Abbildung zwischen metrischen Räumen, und ist  $X$  kompakt, so ist die Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  stetig,  $f$  ist also bereits ein Homöomorphismus. Außerdem folgt:  $Y$  ist kompakt.

5° Für zwei injektive Parametrisierungen  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow E$  eines Jordanbogens  $C \subset E$  ist der Parameterwechsel  $\varphi := (\gamma_2)^{-1} \circ \gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  ein Homöomorphismus (Begründung analog zu 4°). Es gilt nach 25.7.5°:  $\gamma_1$  ist genau dann rektifizierbar, wenn  $\gamma_2$  rektifizierbar ist, und es gilt  $L\gamma_1 = L\gamma_2$ .

### (26.3) Definition: (Bogenlänge, Regularität)

1° Ein Jordanbogen  $C$  heißt *rektifizierbar*, wenn es eine injektive und rektifizierbare Parametrisierung  $\gamma$  von  $C$  gibt (äquivalent dazu nach 26.2.5°: wenn alle injektiven Parametrisierungen rektifizierbar sind).  $L\gamma$  ist dann die *Bogenlänge*  $LC$  von  $C$ .

2° Eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow E$  heißt *regulär*, wenn sie stetig differenzierbar ist und  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  erfüllt. Ein Jordanbogen heißt *regulär*, wenn es eine injektive und reguläre Parametrisierung gibt.

Es sind z.B. die Gerade, die Kreislinie und die Schraubenlinie aus 25.4 sämtlich regulär, wie auch der Graph  $t \mapsto (t, f(t))$ , wenn  $f$  stetig differenzierbar ist.

Das Hauptergebnis von §25, der Satz 25.12, überträgt sich unmittelbar:

### (26.4) Satz: Sei $\gamma$ eine reguläre Kurve.

1° Die Kurvenlängenfunktion  $s(t) = s_\gamma(t) = L_a^t \gamma|_{[a,t]}$ ,  $t \in [a, b]$ , ist stetig differenzierbar und es ist  $\dot{s} > 0$ .

2° Die Umkehrfunktion  $\varphi = s^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$ ,  $L := L_a^b \gamma$ , ist stetig differenzierbar und  $\sigma := \gamma \circ \varphi$  ist eine reguläre Kurve derselben Spur ( $\gamma^* = \sigma^*$ ) mit

$$s_\sigma(s) = s$$

für  $s \in [0, L]$ .

3° Unter den Parametrisierungen von  $\gamma^*$  deren Geschwindigkeitsvektoren stets die Norm 1 haben, ist  $\sigma$  aus 2° eindeutig bis auf die Festlegung des Anfangspunktes  $\sigma(0) = c_0 \in \gamma^*$  und die Durchlaufungsrichtung.

Man spricht im Falle von  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$  von einer *Parametrisierung durch die Bogenlänge*, weil ja  $L_a^t \gamma|_{[a,t]} = \int_a^t dt = t - a$ .

Jeder reguläre Jordanbogen  $C$  hat also nach 26.4.2° eine Parametrisierung durch die Bogenlänge mit  $a = 0$ . Eine solche Parametrisierung wird auch als *natürliche Parametrisierung* bezeichnet.

### Ebene Kurven und Raumkurven in der euklidischen Geometrie:

Im Folgenden (Rest des Paragraphen) geht es um ebene Kurven und um Raumkurven, das heißt um Kurven in  $\mathbb{R}^2$  oder in  $\mathbb{R}^3$ , wobei diese beiden Räume mit der natürlichen euklidischen Norm und der üblichen Orientierung versehen werden. Die Kurven sollen meist auch höhere Ableitungen besitzen, es ist durchaus üblich, von vornherein zu verlangen, dass die Kurven (d.h. die Komponenten) beliebig oft differenzierbar sind.

**(26.5) Ebene Kurven:** Es sei  $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  natürliche Parametrisierung eines Jordanbogens  $C \subset \mathbb{R}^2$ .  $\gamma$  sei außerdem noch zweimal stetig differenzierbar.

1°  $v(t) := \dot{\gamma}(t)$  und  $\dot{v}(t)$  stehen senkrecht aufeinander.

2° Ist  $n(t)$  der zu  $v(t)$  senkrechte Einheitsvektor, der  $(v(t), n(t))$  zu einem positiv orientierten Orthonormalsystem macht, so gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ , so dass  $\dot{v}(t) = \kappa(t)n(t)$  gilt.  $\kappa(t)$  heißt die Krümmung von  $C$  in  $\gamma(t)$  (als ebener Jordanbogen).

Das Orthogonalsystem

$$(v(t), n(t))$$

heißt das *begleitende Zweibein* in  $\gamma(t) \in C$ . Es hängt nur von der Durchlaufungsrichtung der Parametrisierung ab. Für eine entgegengesetzte Parametrisierung  $\beta(t) := \gamma(a+b-t)$ ,  $t \in [a, b]$  gilt für  $c = \gamma(t_0) = \beta(t_1)$ :  $\dot{\beta}(t_1) = -\dot{\gamma}(t_0)$  und das zugehörige Zweibein ist  $(-v(t_0), -n(t_0))$  mit Krümmung  $-\kappa(t_0)$ .

Ganz allgemein beschreibt die ebene Krümmung  $\kappa(t)$  einer ebenen Kurve die Abweichung der Kurve von einer geradlinigen Bewegung:

**(26.6) Satz:** Ist die Krümmung eines Jordanbogens identisch 0, so handelt es sich bei dem Bogen um ein Geradenstück.

Analog kann man den Kreisbogen vom Radius  $r > 0$  charakterisieren.

**(26.7) Satz:** Im Falle einer dreimal stetig differenzierbaren, regulären und natürlichen Parametrisierung eines Jordanbogens sind die so genannten Frenetschen Formeln

$$\dot{v} = +\kappa n$$

$$\dot{n} = -\kappa v$$

erfüllt.

Zu einer vorgegebenen stetig differenzierbaren Funktion  $\kappa : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  hat man dann aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen das folgende Resultat: Zu vorgegeben  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  und  $v_0 \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|v_0\| = 1$  gibt es einen eindeutig bestimmten Jordanbogen, der bei  $x_0$  beginnt, in Richtung  $v_0$  verläuft und in der natürlichen Parametrisierung die Funktion  $\kappa$  als Krümmungsfunktion hat.

**(26.8) Raumkurven:** Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  natürliche Parametrisierung eines Jordanbogens  $C \subset \mathbb{R}^3$ .  $\gamma$  sei außerdem noch dreimal stetig differenzierbar mit nirgends verschwindender Beschleunigung  $\dot{v}(t) \neq 0$  ( $v(t) := \dot{\gamma}(t)$ ) für alle  $t \in [a, b]$ .

1° Mit dem Normalenvektor  $n(t) := \frac{\dot{v}(t)}{\|\dot{v}(t)\|}$  und dem Binormalenvektor  $b(t) := v(t) \times n(t)$  ist  $(v(t), n(t), b(t))$  ein positiv orientiertes Orthonormalsystem des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^3$ , welches das *begleitende Dreibein* genannt wird.

2° Der eindeutig bestimmte Koeffizient  $\kappa(t)$  mit  $\dot{v}(t) = \kappa(t)n(t)$ , also  $\kappa(t) = \|\dot{v}(t)\|$ , ist die *Krümmung* (genauer *Raumkrümmung*) der Kurve in  $\gamma(t)$ .

3° Der eindeutig bestimmte Koeffizient  $\tau(t)$  von  $\dot{n}(t)$  in Bezug auf  $b(t)$ , also  $\tau(t) = \langle \dot{n}(t), b(t) \rangle$  ist die *Torsion* oder die *Windung* der Kurve in  $\gamma(t)$ . [01.06.2007]

Es gilt:

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}').$$

4° Die Veränderung des begleitenden Dreibeins wird durch das folgende System (die Frenetschen Formeln) beschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \kappa n \\ \dot{n} &= -\kappa v + \tau b \\ \dot{b} &= -\tau n \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Raumkrümmung immer nichtnegativ ist, während die Krümmung einer ebenen Kurve (je nach Durchlaufungsrichtung) auch negativ sein kann (vgl. Beispiel 26.9.1°).

**Bemerkung:** Die Torsion einer Kurve bzw. eines regulären Jordanbogens im Raum  $\mathbb{R}^3$  gibt die Abweichung der Kurve an, in einer festen affinen Ebene zu verlaufen. Denn im Falle  $\tau(t) = 0$  für alle  $t \in [a, b]$  ist der Binormalenvektor  $b$  wegen  $\dot{b} = 0$  konstant und die Kurve verläuft vollständig in der Ebene  $\gamma(a) + b^\perp$  senkrecht zu  $b$ .

### (26.9) Beispiele:

1° Die Kreislinie  $RS^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$  mit dem Radius  $R > 0$  ist ein regulärer geschlossener Jordanbogen und hat z.B. die reguläre Parametrisierung  $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Diese Parametrisierung ist aber keine natürliche Parametrisierung. Die Kurvenlänge  $s(t) = L_0^t \gamma \mid [0, t]$  ist  $s(t) = \int_0^t R dt = Rt$  wegen  $\|\dot{\gamma}\| = R$ , und eine natürliche Parametrisierung ergibt sich als

$$\sigma(s) = R\left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}\right), \quad s \in [0, 2\pi R].$$

Als Geschwindigkeitsvektor hat man

$$v(s) = \dot{\sigma}(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right)$$

und als Normalenvektor

$$n(s) = -\left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}\right),$$

der Normalenvektor zeigt also in die entgegengesetzte Richtung als der Vektor  $\sigma(s)$ . Wegen

$$\dot{v}(s) = \frac{1}{R} \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}\right)$$

ist die Krümmung also konstant gleich  $\frac{1}{R}$ : Für große Radien  $R$  wird die Krümmung also sehr klein, für kleine Radien hat man eine große Krümmung.

Mit der entgegengesetzten Durchlaufungsrichtung, also mit der Parametrisierung

$$\beta(s) = R(\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R})$$

erhält man

$$v(s) = -(\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R})$$

und

$$n(s) = (\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R})$$

sowie als Krümmung  $\kappa = -\frac{1}{R}$ .

2° Die Schraubenlinie  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$ ,  $t \in [0, b]$ , hat die natürliche Parametrisierung

$$\sigma(s) = (r \cos \frac{s}{N}, r \sin \frac{s}{N}, h \frac{s}{N}), \quad s \in [0, Nb],$$

wobei  $N = \sqrt{r^2 + h^2}$ . Aus

$$\dot{\sigma}(s) = (-\frac{r}{N} \sin \frac{s}{N}, +\frac{r}{N} \cos \frac{s}{N}, \frac{h}{N})$$

$$\ddot{\sigma}(s) = (-\frac{r}{N^2} \cos \frac{s}{N}, -\frac{r}{N^2} \sin \frac{s}{N}, 0)$$

$$\ddot{\sigma}(s) = (+\frac{r}{N^3} \sin \frac{s}{N}, -\frac{r}{N^3} \cos \frac{s}{N}, 0)$$

ergibt sich

$$\det(\dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \ddot{\sigma}) = \frac{r^2 h}{N^6}.$$

Daher haben wir als Krümmung und Torsion

$$\kappa = \frac{r}{N^2}, \quad \tau = \frac{h}{N^2}.$$

## §27 Integration als stetige lineare Operation

Der Integration sind wir bisher nur sporadisch in Kapitel VII und in §25 begegnet. In diesem Paragraphen beginnt eine systematische Untersuchung der Integration von vektorwertigen Abbildungen in einer Veränderlichen. Damit werden die bisher verwendeten Eigenschaften und Konstruktionen von Integralen unter einem einheitlichen Gesichtspunkt begründet. Dieser einheitliche Gesichtspunkt ist in diesem Paragraphen die Betonung des Integrals als eine **stetige lineare Operation**.

Die Integration ist im Rahmen der Differential- und Integralrechnung das weitaus komplexere Konzept im Vergleich zur Differentiation mit vielen Verästelungen und Ausrichtungen, die zum Beispiel in die Funktionalanalysis und in die Wahrscheinlichkeitstheorie hineinreichen. Im Anschluss an diesen Paragraphen werden wir uns in § 28 mit einem weitergehenden Konzept (dem Riemann-Stieltjes-Integral) der Integration in einer Veränderlichen beschäftigen. Im nächsten Semester behandeln wir dann die allgemeine Integration in mehreren Veränderlichen als die Lebesguetheorie im Rahmen der Maß- und Integrationstheorie.

In diesem Paragraphen bezeichnet  $[a, b]$  wieder ein kompaktes Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , das gelegentlich durch  $J = [a, b]$  abgekürzt wird. Für einen Banachraum  $E$  bezeichnet

$\mathcal{B} := \mathcal{B}(J, E)$  den Banachraum der beschränkten  $E$ -wertigen Funktionen oder Abbildungen (vgl. 23.18.1°) und  $\mathcal{C} := \mathcal{C}(J, E)$  den abgeschlossenen Untervektorraum der stetigen Funktionen  $f : J \rightarrow E$  (vgl. 25.24). Diese stetigen Funktionen  $f$  haben wir in den vorangehenden zwei Paragraphen auch Kurven genannt und generell mit  $\gamma$  bezeichnet.

Natürlich ist wie zuvor der Fall  $\mathbb{R}^n$  bereits interessant, in diesem Paragraphen und im nachfolgenden Paragraphen 28 aber ganz besonders schon der Fall  $E = \mathbb{R}$ , weil auch für diesen Fall der neue Blickpunkt neue Konzepte und Resultate bringt.

Zur Motivation beginnen wir mit einem bekannten Resultat aus Kapitel VII:

**(27.1) Beobachtung:** Im Falle  $E = \mathbb{R}$  ist das Integral  $I f = I(f) := \int_a^b f(t) dt$ ,  $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ , ein stetiges lineares Funktional

$$I : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

in folgendem Sinne: Für  $g, f, f_n \in \mathcal{C}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$1^\circ I(f + \lambda g) = I(f) + \lambda I(g),$$

$$2^\circ I f_n \rightarrow I f \text{ in } \mathbb{R}, \text{ wenn } f_n \rightarrow f \text{ in } \mathcal{C}, \text{ d.h. wenn } f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig (d.h. } \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0).$$

Die Stetigkeit folgt dabei aus der Abschätzung  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b - a) \|f\|_\infty$ .

Wir wollen jetzt ganz unabhängig von den bisherigen Ansätzen zur Integration ein Integral für die einfachsten  $E$ -wertigen Funktionen auf dem Intervall  $J$ , die Treppenfunktionen, definieren.

**(27.2) Definition:** (Integration von Treppenfunktionen)

1° Eine Abbildung  $g : J \rightarrow E$  heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung  $Z = \{t_k : k = 0, 1, \dots, m\}$  des Intervalles  $J = [a, b]$  so gibt, dass  $g$  auf allen Intervallen  $]t_{k-1}, t_k[$  konstant ist:  $g|_{]t_{k-1}, t_k[} = g_k \in E$ .

2° Eine solche Zerlegung  $Z$  heiße *Zerlegung zu  $g$* .

3° Sei  $g$  eine Treppenfunktion und  $Z$  eine Zerlegung zu  $g$ , dann wird das *Integral von  $g$*  über  $J$  definiert als die endliche Summe

$$\int_a^b g(t) dt := \sum_{k=1}^m g_k(t_k - t_{k-1}) \in E.$$

Eine Treppenfunktion  $g$  nimmt also nur endliche viel Werte an: Die  $g_k \in E$  auf den Intervallen und die  $g(t_k) \in E$  in den Zerlegungspunkten. Insbesondere ist  $g$  beschränkt, also  $g \in \mathcal{B}(J, E)$ . Die Werte  $g(t_k)$  spielen im Übrigen keine Rolle für den Wert des Integrals.

**(27.3) Lemma:** Das Integral  $\int_a^b g(t) dt = \sum_{k=1}^m g_k(t_k - t_{k-1})$  einer Treppenfunktion  $g : J \rightarrow E$  ist unabhängig von der Zerlegung  $Z$  zu  $g$ .

Das soll heißen, dass für eine andere Zerlegung  $Z' = \{t'_l : l = 0, 1, \dots, m'\}$  mit konstanten  $g|_{]t'_{l-1}, t'_l[} = g'_l \in E$  gilt:

$$\sum_{k=1}^m g_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{l=1}^{m'} g'_l(t'_l - t'_{l-1}).$$

Also ist das Integral  $\int_a^b g(t) dt$  für Treppenfunktionen wohldefiniert und liefert eine Abbildung  $g \mapsto \int_a^b g(t) dt$  auf der Menge  $\mathcal{T}$  der Treppenfunktionen.

**(27.4) Lemma:** Die Menge der Treppenfunktionen  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(J, E)$  ist ein Untervektorraum des Banachraumes  $\mathcal{B}(J, E)$ . [5.6.7]

Wir werden gleich sehen (in 27.9), dass auch das neue Integral  $I(g) = Ig := \int_a^b g(t) dt$  für Treppenfunktionen  $g \in \mathcal{T}$  eine stetige und lineare Abbildung  $I : \mathcal{T} \rightarrow E$  liefert.

Für die Erweiterung des Integrals von Treppenfunktionen auf allgemeinere  $f : J \rightarrow E$ , insbesondere auf stetige  $f$  und stückweise stetige  $f$ , benötigen wir vorher zwei abstrakte Resultate zu stetigen linearen Abbildungen. Diese passen gut in die Darstellung des letzten Kapitels, werden aber jetzt erst behandelt, und sie kommen unmittelbar danach in 27.11 zur Anwendung.

**(27.5) Satz:** Für eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $A : F \rightarrow E$  zwischen normierten Räumen sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1°  $A$  ist stetig.
- 2°  $A$  ist in  $0 \in F$  stetig.
- 3°  $\|A\| := \sup\{\|Av\| : \|v\| \leq 1\} < \infty$ .
- 4° Es gibt eine Konstante  $C \geq 0$  mit  $\|Av\| \leq C\|v\|$  für alle  $v \in F$ .

**(27.6) Bemerkungen:**

1° Wegen 27.5.4° (oder 3°) heißen die stetigen linearen Abbildungen  $A : F \rightarrow E$  auch beschränkte lineare Abbildungen oder beschränkte (lineare) Operatoren. In der Physik sind wichtige lineare Operatoren allerdings nicht beschränkt, z.B. Orts- und Impulsoperator in der elementaren Quantenmechanik. Diese Operatoren sind  $\mathbb{C}$ -linear auf einem dichten Untervektorraum  $D$  von  $F$  (und  $F$  ist Hilbertraum), aber unbeschränkt auf der Kugel  $B_F(0, 1) \cap D$ .

2°  $\mathcal{L}(F, E) := \{A \in \text{Hom}(F, E) : A \text{ stetig}\}$  ist ein Untervektorraum des Vektorraums  $\text{Hom}(F, E)$  der  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen von  $F$  nach  $E$ .  $A \mapsto \|A\|$  ist eine Norm auf  $\mathcal{L}(F, E)$ , die Operatornorm. Damit wird  $\mathcal{L}(F, E)$  zu einem normierten Raum. Dieser ist vollständig, wenn  $E$  ein Banachraum ist.

3°  $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  mit der Operatornorm  $A \mapsto \|A\|$  ist der „stetige“ Dualraum, der Banachraum der stetigen Linearformen auf  $E$ .

Wir benötigen den folgenden Fortsetzungssatz.

**(27.7) Satz:**  $E, F$  seien normierte Räume und  $T \subset F$  sei ein Untervektorraum.

- 1° Die abgeschlossene Hülle  $\overline{T}$  ist ein Untervektorraum von  $F$ .
- 2° Ist  $E$  Banachraum, so hat jede stetige lineare Abbildung  $A : T \rightarrow E$  eine eindeutig bestimmte stetige und lineare Fortsetzung  $\overline{A}$  auf  $\overline{T}$ . Es gilt  $\|\overline{A}\| = \|A\|$ .

Es gibt also  $\overline{A} : \overline{T} \rightarrow E$  mit:  $\overline{A}$  ist stetig und linear und es ist für  $v \in T$  stets  $\overline{A}(v) = A(v)$ . Und es gibt nur ein solches  $\overline{A}$ .

**(27.8) Bemerkung:**  $\overline{A}$  lässt sich noch weiter fortsetzen zu einer stetigen und linearen Abbildung  $A^\sim$  auf ganz  $F$  mit  $\|A^\sim\| = \|A\|$ , allerdings nicht mehr eindeutig. Das ist die Aussage des Satzes von Hahn-Banach.

Zurück zum Integral für Treppenfunktionen.

**(27.9) Satz:**  $I(g) = I_g := \int_a^b g(t) dt$  für Treppenfunktionen  $g \in \mathcal{T} = \mathcal{T}(J, E)$  definiert eine Abbildung  $I : \mathcal{T} \rightarrow E$  mit

1°  $I$  ist  $\mathbb{K}$ -linear.

2°  $\|I(g)\| \leq I(\|g\|)$ .

3°  $I(\|g\|) \leq (b - a) \|g\|_\infty$ .

4°  $I$  ist stetig auf  $\mathcal{T}$ , weil  $\|I_g\| \leq (b - a) \|g\|_\infty$ .

5°  $a < c < b$ :  $\int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt = \int_a^b g(t) dt$ .

**(27.10) Notation:**  $\int_b^a g(t) dt := - \int_a^b g(t) dt$ .

Also  $\int_c^d g(t) dt + \int_d^e g(t) dt = \int_c^e g(t) dt$  für  $c, d, e \in [a, b] = J$ .

**(27.11) Folgerung / Definition:** Angewandt auf den Raum  $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$  der Treppenfunktionen erhält man aus dem vorangehenden Fortsetzungssatz zu der nach 27.9 stetigen linearen Abbildung

$$I : \mathcal{T} \rightarrow E, g \mapsto I(g) = \int_a^b g(t) dt,$$

die eindeutig bestimmte Fortsetzung  $\bar{I} : \bar{\mathcal{T}} \rightarrow E$ . Wir setzen

$$\int_a^b f(t) dt := \bar{I}(f), f \in \bar{\mathcal{T}},$$

und entsprechend  $\int_c^d f(t) dt$  für  $c, d \in J$  (vgl. 27.10).

Weiterhin bezeichnen wir den Abschluss von  $\mathcal{T}$  in  $\mathcal{B}$  als

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(J, E) := \overline{\mathcal{T}(J, E)} \subset \mathcal{B}(J, E).$$

$\mathcal{S}$  ist als abgeschlossener Untervektorraum eines Banachraumes wieder ein Banachraum.

Damit ist das Integral auf die Klasse  $\mathcal{S}$  von Funktionen fortgesetzt, und das Integral ist wieder eine stetige lineare Abbildung auf dem Raum  $\mathcal{S}$ . Um dieses Ergebnis wertschätzen zu können, müssen wir den Raum  $\mathcal{S}$  genauer kennen lernen, oder wenigstens zeigen, dass eine große Klasse von interessanten Funktionen in  $\mathcal{S}$  enthalten ist. In der Tat sind die stetigen und stückweise stetigen Funktionen  $J \rightarrow E$  in  $\mathcal{S}$  enthalten, es gilt also zu beweisen, dass insbesondere  $\mathcal{C} \subset \bar{\mathcal{T}}$ .

Dazu vorweg als direkte Verallgemeinerung von 15.10:

**(27.12) Satz:** Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist bereits gleichmäßig stetig, wenn  $X$  kompakt ist.

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $f$  stetig ist, gibt es zu jedem Punkt  $x \in X$  ein  $\delta_x > 0$  mit  $f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \varepsilon/2)$ . Für  $y, y' \in B(x, \delta_x)$  folgt  $d(f(y), f(y')) \leq d(f(y), f(x)) + d(f(x), f(y'))$  nach der Dreiecksungleichung, also  $d(f(y), f(y')) < \varepsilon$ . Da  $X$  kompakt ist, gibt es zu der offenen Überdeckung  $(B(x, \delta_x) : x \in X)$  von  $X$  eine Lebesgue-Zahl  $\eta > 0$  (vgl. 24.21), das heißt, zu jedem  $y \in X$  existiert  $x \in X$  mit  $B(y, \eta) \subset B(x, \delta_x)$ . Also gilt für  $y, y' \in X$  mit  $d(y, y') < \eta$  wegen  $y, y' \in B(x, \delta_x)$  stets  $d(f(y), f(y')) < \varepsilon$ . Insgesamt:  $\forall y, y' \in X : d(y, y') < \delta := \eta \implies d(f(y), f(y')) < \varepsilon$ .



**(27.13) Satz:** Jede stetige Funktion  $f : J \rightarrow E$  lässt sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren, das heißt, es gibt eine Folge  $(g_n)$  von Treppenfunktionen  $g_n \in \mathcal{T}(J, E)$  mit  $g_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{B}(J, E)$ , also  $\|g_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ . Anders ausgedrückt: Es gilt  $\mathcal{C}(J, E) \subset \mathcal{S}(J, E)$ .

**Beweis (fundamentale Konstruktion):** Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit (vgl. 27.12) ein  $\delta > 0$  mit  $\|f(s) - f(t)\| < \varepsilon$ , wenn nur  $|s - t| < \delta$ . Sei  $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  eine Zerlegung von  $[a, b] = J$  der Feinheit  $\Delta(Z) := \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, 2, \dots, m\} < \delta$  und sei  $\tau \in \mathbb{R}^m$  ein Vektor  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$  mit  $\tau_k \in ]t_{k-1}, t_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Dann ist durch

$$g(a) := f(a) \text{ und } g|_{]t_{k-1}, t_k]} := f(\tau_k), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

eine Treppenfunktion  $g \in \mathcal{T}$  definiert mit  $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . Denn für  $t \in J$  ist  $t = a$ , also  $\|g(a) - f(a)\| = 0$ , oder es gilt  $t \in ]t_{k-1}, t_k]$  für ein  $k$ , also  $\|g(t) - f(t)\| = \|f(\tau_k) - f(t)\| < \varepsilon$ , wegen  $|\tau_k - t| \leq t_k - t_{k-1} < \delta$ . Insgesamt  $\|g - f\|_\infty = \sup\{\|g(t) - f(t)\| : t \in J\} \leq \varepsilon$ . Zu  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  findet sich also eine Folge  $(g_n)$  von Treppenfunktionen mit  $\|g_n - f\|_\infty \leq \varepsilon_n \rightarrow 0$ .

**(27.14) Bemerkungen:**

1° Weil  $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$  stetig ist, gilt:  $f_k \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}$  impliziert  $\int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt$ .

2° Insbesondere kann man die folgenden Standardapproximationen durch Treppenfunktionen für stetige  $f$  wählen: Die äquidistanten Zerlegungen  $Z^{(n)} = \{a + k2^{-n}(b - a) : k = 0, 1, \dots, 2^n\}$  mit  $\Delta Z^{(n)} = 2^{-n}$  und Zwischenvektoren  $\tau_k^{(n)}, \tau_k^{(n)} := t_k^{(n)} = a + k2^{-n}(b - a)$  führen zu den Summen

$$S(f, Z^{(n)}, \tau^{(n)}) = \sum_{k=1}^{2^n} f(t_k^{(n)})(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-n} f(t_k^{(n)}),$$

die gegen das Integral  $\int_a^b f(t) dt$  konvergieren:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-n} f(t_k^{(n)}).$$

Damit ist der Zusammenhang zu dem in Kapitel VII verwendeten Integralbegriff hergestellt wie auch der zur Integration in §25.

[8.6.7]

3° Wir erhalten durch 27.13 in Verbindung mit 27.11 eine neue Interpretation des Integrals für stetige  $f$ : Für jede Folge  $(g_n)$  von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, ist

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) dt,$$

wobei die  $\int_a^b g_n(t) dt$  einfache endliche Summen sind.

4° Auch die stückweise stetigen Funktionen  $f : J \rightarrow E$  liegen in  $\mathcal{S}$  (Definition in 25.15.3°).

Eine externe Charakterisierung der Funktionen aus  $\mathcal{S}$ :

**(27.15) Satz:**

1° Die Funktionen  $f \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(J, E)$  sind genau die sprungstetigen Funktionen, d.h.  $f$  gehört zu  $\mathcal{S}$ , wenn alle sinnvollen einseitigen Grenzwerte, also die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x + h) =: f(x + 0), \quad x \in [a, b],$$

$$\lim_{h \rightarrow 0, h < 0} f(x+h) =: f(x-0), \quad x \in ]a, b].$$

2° Eine solche Funktion ist stetig mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten  $t \in J$ .

3° Zu  $\mathcal{S}$  gehören alle stetigen Funktionen und auch alle stückweise stetigen Funktionen. Dabei soll  $f$  stückweise stetig heißen, wenn bezüglich einer Zerlegung  $A = \{a_k\}$  von  $J$  die Restriktionen  $f|_{]a_{k-1}, a_k[}$  stetig sind, und jeweils stetige Fortsetzungen nach  $[a_{k-1}, a_k]$  haben.<sup>1</sup>

4° Zu  $\mathcal{S}$  gehören alle Funktionen mit beschränkter Variation.

5° Im Falle  $E = \mathbb{R}$  sind die monotonen Funktionen in  $\mathcal{S}(J, \mathbb{R})$  und auch Funktionen  $f = g - h$  mit  $g$  und  $h$  monoton.<sup>2</sup>

Beweise: 1° wird z.B. in Amann-Escher bewiesen und 2° folgt aus der Definition von  $\mathcal{S}$ . 3° wurde in 27.13 gezeigt und folgt auch aus 2°. Einen Beweis zu 4° findet man in Dieudonné und 5° sieht man unmittelbar: Ist  $f$  monoton wachsend, so gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x+h) = \inf\{f(t) : t \in [a, b], t > x\}$$

für  $x \in [a, b[$  und entsprechend

$$\lim_{h \rightarrow 0, h < 0} f(x+h) = \sup\{f(t) : t \in [a, b], t < x\}$$

für  $x \in ]a, b]$ .

Die sprungstetigen Funktionen werden auch *Regelfunktionen* genannt.

**(27.16) Satz:**  $f \in \mathcal{S}$ , dann ist  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  stetig.

**(27.17) Satz:** Sei  $f \in \mathcal{S}$  in  $x_0 \in J$  stetig. Dann ist  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  in  $x_0$  differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \Big|_{x=x_0} = f(x_0).$$

Abschließend wollen wir den in § 25 entscheidenden Satz 25.11 beweisen in einer leicht verallgemeinerten Form:

**(27.18) Hauptsatz:** Ist  $f : J \rightarrow E$  stetig und  $F : J \rightarrow E$  differenzierbar mit  $\dot{F} = f$ , so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Beweis: Sei  $H(x) := \int_a^x f(t) dt - F(x)$  für  $x \in [a, b]$ . Dann ist  $H$  differenzierbar mit  $\dot{H} = f - f = 0$ . Also ist  $H$  konstant nach dem nachfolgenden Mittelwertsatz, also  $H(x) = H(a) = -F(a)$ . Es folgt  $\int_a^b f(t) dt = F(b) + H(b) = F(b) - F(a)$ .

**(27.19) Satz: (Mittelwertsatz)** Die stetige Funktion  $g : J \rightarrow E$  sei in  $]a, b[$  differenzierbar. Dann gilt

$$\|g(b) - g(a)\| \leq \sup\{\|\dot{g}(t)\| : a < t < b\}(b - a).$$

<sup>1</sup>Die stückweise stetigen Funktionen sind also die sprungstetigen Funktionen mit höchstens endlich vielen Sprungstellen.

<sup>2</sup>Solche Funktionen sind stets von beschränkter Variation, insofern ist 5° in 4° enthalten. Reellwertige Funktionen von beschränkter Variation lassen sich stets als Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen schreiben.

**Beweis:** Es ist nur der Fall  $\sup\{\|\dot{g}(t)\| : a < t < b\} < \infty$  zu untersuchen. Dazu wähle man eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$  mit  $\sup\{\|\dot{g}(t)\| : a < t < b\} < M$ . Für jeden Punkt  $t \in [a, b]$ ,  $a < t < b$ , gilt  $\|\dot{g}(t)\| < M$ . Also gibt es wegen

$$\dot{g}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

ein  $r_t > 0$  mit der Eigenschaft

$$\forall h \in \mathbb{R} : |h| < 2r_t, t+h \in [a, b] \implies \left\| \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \right\| < M.$$

Also  $\|g(t+h) - g(t)\| < M|h|$ . Für jedes kompakte Intervall  $K = [a', b'] \subset ]a, b[$  existiert jetzt zu der offenen Überdeckung  $K \subset \bigcup \{]t - r_t, t + r_t[ : t \in K\}$  eine endliche Teilüberdeckung:  $a' = t_0, t_1, \dots, t_m = b' \in [a, b]$ ,  $t_{k-1} < t_k$ , mit  $K \subset \bigcup_{k=1}^m ]t_k - r_{t_k}, t_k + r_{t_k}[$ . Dann ist  $t_{k-1} + r_{t_{k-1}} > t_k - r_{t_k}$  (oder diese Relation ist richtig für ein kleineres  $k'$ ,  $k' < k$ , und die folgende Argumentation gilt analog), also  $t_k - t_{k-1} < r_{t_k} + r_{t_{k-1}} \leq \max\{2r_{t_k}, 2r_{t_{k-1}}\}$ . Es folgt  $t_k = t_{k-1} + h$  mit  $|h| < 2r_{t_{k-1}}$  und damit  $\|g(t_k) - g(t_{k-1})\| < M|h| = M(t_k - t_{k-1})$ , oder  $t_{k-1} = t_k + h$  mit  $|h| < r_{t_k}$  und demselben Ergebnis  $\|g(t_{k-1}) - g(t_k)\| < M(t_k - t_{k-1})$ . Daher

$$\|g(b') - g(a')\| \leq \sum_{k=1}^m \|g(t_{k-1}) - g(t_k)\| < M \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) = M(b' - a') < M(b - a).$$

Mit  $b' \rightarrow b$  und  $a' \rightarrow a$  ergibt sich zunächst

$$\|g(b) - g(a)\| \leq M(b - a)$$

für jede Konstante  $M$  mit  $M > \sup\{\|\dot{g}(t)\| : a < t < b\}$ . Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Damit ist auch der Satz 25.11 komplett bewiesen.